Matemáticas I
Aplicaciones de la integral simple

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

August 17, 2014

Cálculo de áreas planas

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo I.

Cálculo de áreas planas

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo I. Su área viene dada por

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

Cálculo de áreas planas

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo I.Su área viene dada por

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

Cuando la función $f - g$ no tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$, para calcular esta integral se descompone dicho intervalo en intervalos en los que la función $f - g$ es siempre positiva o siempre negativa, lo que permite quitar el valor absoluto en el integrando.

Cálculo de áreas planas

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II.

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II.Su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y) - g(y)| \, dy$$

Cálculo de áreas planas

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II.Su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y$$

La distinción entre regiones de tipo I y tipo II es una cuestión de conveniencia. No son conjuntos de distinta naturaleza sino formas distintas de describir un conjunto.

Cálculo de áreas planas

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II.Su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y$$

La distinción entre regiones de tipo I y tipo II es una cuestión de conveniencia. No son conjuntos de distinta naturaleza sino formas distintas de describir un conjunto.Con frecuencia una región puede considerarse tanto de tipo I como de tipo II y hay que elegir la descripción que más facilite el cálculo de la correspondiente integral.

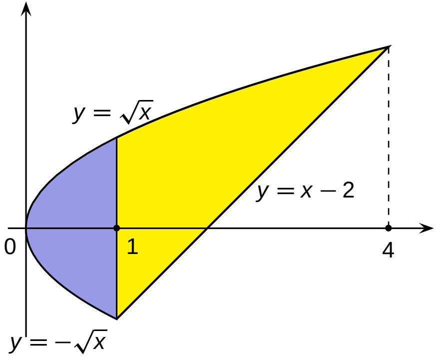
Basta cambiar la variable x por la variable y para convertir una región de tipo II en otra de tipo I.

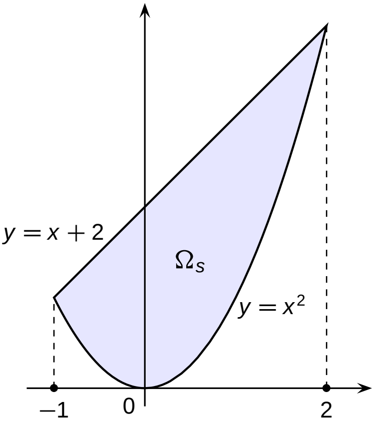
Basta cambiar la variable x por la variable y para convertir una región de tipo II en otra de tipo I.Geométricamente, lo que hacemos es una simetría respecto a la recta $y = x$, lo que deja invariante el área.

Basta cambiar la variable x por la variable y para convertir una región de tipo II en otra de tipo I.Geométricamente, lo que hacemos es una simetría respecto a la recta $y = x$, lo que deja invariante el área.Por tanto, si en un ejercicio resulta conveniente considerar la región cuya área quieres calcular como una región de tipo II y te encuentras más cómodo trabajando con regiones de tipo I, basta con que cambies los nombres de las variables.

Ejemplo

Calcula el área de la región Ω comprendida entre la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = x - 2$ considerando que dicha región es:
a) De tipo I.
b) De tipo II.




$y = x + 2$
Ω_s
$y = x^2$
-1
0
2

Curvas planas

La forma más general de dar una curva en el plano es por medio de una función γ definida en un intervalo $[a, b]$ que toma valores en $\mathbb{R}^2$.

La forma más general de dar una curva en el plano es por medio de una función γ definida en un intervalo $[a, b]$ que toma valores en $\mathbb{R}^2$.Para cada $t \in [a, b]$ se tiene que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la curva.

La forma más general de dar una curva en el plano es por medio de una función γ definida en un intervalo $[a,b]$ que toma valores en $\mathbb{R}^2$.Para cada $t \in [a,b]$ se tiene que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la curva.Supondremos que las funciones $t \mapsto x(t)$ y $t \mapsto y(t)$ tienen derivada continua en $[a,b]$.

Curvas planas

La forma más general de dar una curva en el plano es por medio de una función γ definida en un intervalo $[a,b]$ que toma valores en $\mathbb{R}^2$.Para cada $t \in [a,b]$ se tiene que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la curva.Supondremos que las funciones $t \mapsto x(t)$ y $t \mapsto y(t)$ tienen derivada continua en $[a,b]$.Se dice que $x = x(t)$, $y = y(t)$ son las **ecuaciones paramétricas** de la curva.

Curvas planas

La forma más general de dar una curva en el plano es por medio de una función γ definida en un intervalo $[a, b]$ que toma valores en $\mathbb{R}^2$.Para cada $t \in [a, b]$ se tiene que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la curva.Supondremos que las funciones $t \mapsto x(t)$ y $t \mapsto y(t)$ tienen derivada continua en $[a, b]$.Se dice que $x = x(t)$, $y = y(t)$ son las **ecuaciones paramétricas** de la curva.

El punto $\gamma(a)$ es el origen y $\gamma(b)$ el extremo de la curva.

La forma más general de dar una curva en el plano es por medio de una función γ definida en un intervalo $[a, b]$ que toma valores en $\mathbb{R}^2$.Para cada $t \in [a, b]$ se tiene que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la curva.Supondremos que las funciones $t \mapsto x(t)$ y $t \mapsto y(t)$ tienen derivada continua en $[a, b]$.Se dice que $x = x(t)$, $y = y(t)$ son las **ecuaciones paramétricas** de la curva.

El punto $\gamma(a)$ es el origen y $\gamma(b)$ el extremo de la curva.Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva es **cerrada**.

Curvas planas

La forma más general de dar una curva en el plano es por medio de una función γ definida en un intervalo $[a, b]$ que toma valores en $\mathbb{R}^2$.Para cada $t \in [a, b]$ se tiene que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la curva.Supondremos que las funciones $t \mapsto x(t)$ y $t \mapsto y(t)$ tienen derivada continua en $[a, b]$.Se dice que $x = x(t)$, $y = y(t)$ son las **ecuaciones paramétricas** de la curva.

El punto $\gamma(a)$ es el origen y $\gamma(b)$ el extremo de la curva.Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva es **cerrada**.Se dice que una curva γ es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, si la función γ es inyectiva en $[a, b]$.

La forma más general de dar una curva en el plano es por medio de una función γ definida en un intervalo $[a,b]$ que toma valores en $\mathbb{R}^2$.Para cada $t \in [a,b]$ se tiene que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la curva.Supondremos que las funciones $t \mapsto x(t)$ y $t \mapsto y(t)$ tienen derivada continua en $[a,b]$.Se dice que $x = x(t)$, $y = y(t)$ son las **ecuaciones paramétricas** de la curva.

El punto $\gamma(a)$ es el origen y $\gamma(b)$ el extremo de la curva.Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva es **cerrada**.Se dice que una curva γ es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, si la función γ es inyectiva en $[a,b]$.Una curva cerrada se llama simple si la función γ es inyectiva en $]a,b[$.

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a + r\cos t$, $y(t) = b + R\,\mathrm{sen}\,t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ es una elipse cuyo centro es el punto (a, b) y semiejes de longitudes r y R. Cuando $r = R$ se trata de una circunferencia.

Curvas planas

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a + r\cos t$, $y(t) = b + R\,\mathrm{sen}\,t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ es una elipse cuyo centro es el punto (a, b) y semiejes de longitudes r y R. Cuando $r = R$ se trata de una circunferencia.

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = r(t - \mathrm{sen}\,t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ es la **cicloide**. Es la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r que avanza girando sin deslizar.

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a + r\cos t$, $y(t) = b + R\,\mathrm{sen}\,t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ es una elipse cuyo centro es el punto (a, b) y semiejes de longitudes r y R. Cuando $r = R$ se trata de una circunferencia.

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = r(t - \mathrm{sen}\,t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ es la **cicloide**. Es la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r que avanza girando sin deslizar.

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a(1 + \cos t)\cos t$, $y(t) = a(1 + \cos t)\,\mathrm{sen}\,t$ para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ se llama **cardioide**. Es la curva que describe un punto fijo del borde de un círculo de radio $a/2$ que rueda sin deslizar sobre el exterior de otro círculo del mismo radio.

Cicloide y cardioide

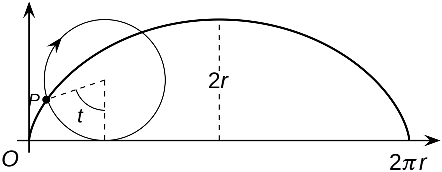


Figure. Cicloide

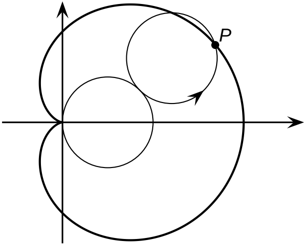


Figure. Cardioide

Curvas planas

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\,\mathrm{sen}^3\, t$ donde $a > 0$ y $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se llama **hipocicloide de cuatro picos** o **astroide**. Es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia de radio $r = a/4$ que rueda sin deslizar sobre el interior de otra circunferencia de radio a.

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\,\mathrm{sen}^3\,t$ donde $a > 0$ y $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se llama **hipocicloide de cuatro picos** o **astroide**. Es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia de radio $r = a/4$ que rueda sin deslizar sobre el interior de otra circunferencia de radio a.

La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\,\mathrm{sen}\,t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se llama **espiral de Arquímedes**. Es la curva que describe un punto que se mueve alejándose del origen con velocidad uniforme sobre una semirrecta que gira alrededor del origen con velocidad angular constante.

Astroide y espiral de Arquímides

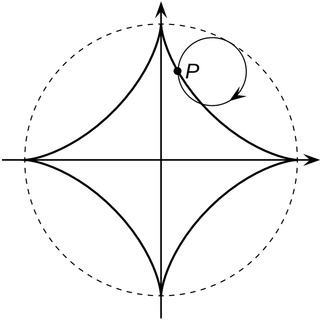


Figure. Astroide

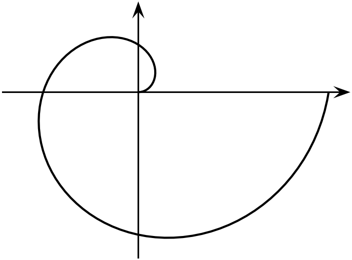


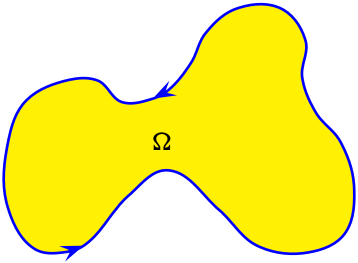
Figure. Espiral de Arquímedes

Área encerrada por una curva

Sea Ω la región rodeada por una curva cerrada simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Se supone que si, a medida que el parámetro t avanza desde a hasta b, andamos sobre la curva siguiendo al punto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entonces la región Ω queda a nuestra izquierda.

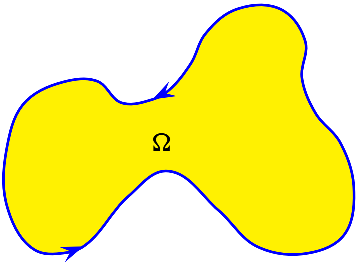
Área encerrada por una curva

Sea Ω la región rodeada por una curva cerrada simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Se supone que si, a medida que el parámetro t avanza desde a hasta b, andamos sobre la curva siguiendo al punto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entonces la región Ω queda a nuestra izquierda.



Área encerrada por una curva

Sea Ω la región rodeada por una curva cerrada simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Se supone que si, a medida que el parámetro t avanza desde a hasta b, andamos sobre la curva siguiendo al punto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entonces la región Ω queda a nuestra izquierda.

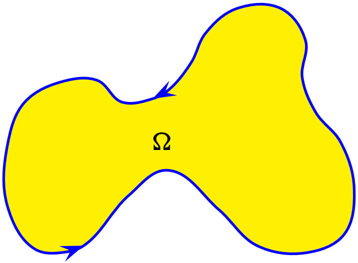


En estas condiciones se verifica que el área de Ω viene dada por:

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Área encerrada por una curva

Sea Ω la región rodeada por una curva cerrada simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Se supone que si, a medida que el parámetro t avanza desde a hasta b, andamos sobre la curva siguiendo al punto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entonces la región Ω queda a nuestra izquierda.



En estas condiciones se verifica que el área de Ω viene dada por:

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Curvas en polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{1}$$

Supondremos que $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ es una función con derivada continua.

Curvas en polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{1}$$

Supondremos que $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua.Dichas ecuaciones se representan simbólicamente en la forma $\rho = f(\vartheta)$. La curva definida por estas ecuaciones se dice que está dada en forma polar y que $\rho = f(\vartheta)$ es la **ecuación polar** de la curva.

Curvas en polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{1}$$

Supondremos que $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ es una función con derivada continua.Dichas ecuaciones se representan simbólicamente en la forma $\rho = f(\vartheta)$. La curva definida por estas ecuaciones se dice que está dada en forma polar y que $\rho = f(\vartheta)$ es la **ecuación polar** de la curva.La razón de esta terminología se explica seguidamente.

Curvas en polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{1}$$

Supondremos que $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ es una función con derivada continua.Dichas ecuaciones se representan simbólicamente en la forma $\rho = f(\vartheta)$. La curva definida por estas ecuaciones se dice que está dada en forma polar y que $\rho = f(\vartheta)$ es la **ecuación polar** de la curva.La razón de esta terminología se explica seguidamente.

Dado un punto $(x,y)\neq(0,0)$, cualquier par de números (ρ,ϑ), tales que $\rho > 0$, $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$, se llaman unas **coordenadas polares** de (x,y).

Curvas en polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{1}$$

Supondremos que $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua.Dichas ecuaciones se representan simbólicamente en la forma $\rho = f(\vartheta)$. La curva definida por estas ecuaciones se dice que está dada en forma polar y que $\rho = f(\vartheta)$ es la **ecuación polar** de la curva.La razón de esta terminología se explica seguidamente.

Dado un punto $(x, y) \neq (0, 0)$, cualquier par de números (ρ, ϑ), tales que $\rho > 0$, $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$, se llaman unas **coordenadas polares** de (x, y).Si, además, se exige que ϑ esté en un intervalo semiabierto $]a, b]$ o $[a, b[$ con $b - a = 2\pi$, dicha condición determina de manera única a ϑ. En particular si exigimos que $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$ entonces ρ es el módulo y ϑ es el argumento principal del número complejo $x + iy$.

Curvas en polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{1}$$

Supondremos que $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua.Dichas ecuaciones se representan simbólicamente en la forma $\rho = f(\vartheta)$. La curva definida por estas ecuaciones se dice que está dada en forma polar y que $\rho = f(\vartheta)$ es la **ecuación polar** de la curva.La razón de esta terminología se explica seguidamente.

Dado un punto $(x, y) \neq (0, 0)$, cualquier par de números (ρ, ϑ), tales que $\rho > 0$, $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$, se llaman unas **coordenadas polares** de (x, y).Si, además, se exige que ϑ esté en un intervalo semiabierto $]a, b]$ o $[a, b[$ con $b - a = 2\pi$, dicha condición determina de manera única a ϑ. En particular si exigimos que $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$ entonces ρ es el módulo y ϑ es el argumento principal del número complejo $x + iy$.

Por tanto, dada una curva por una ecuación polar $\rho = f(\vartheta)$, el punto del plano que corresponde a cada valor del ángulo polar ϑ es $f(\vartheta)(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$ con coordenadas polares:

$$\begin{cases} (f(\vartheta), \vartheta), & \text{si } f(\vartheta) \geqslant 0. \\ (|f(\vartheta)|, \vartheta + \pi), & \text{si } f(\vartheta) < 0. \end{cases}$$

Curvas en polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{1}$$

Supondremos que $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua.Dichas ecuaciones se representan simbólicamente en la forma $\rho = f(\vartheta)$. La curva definida por estas ecuaciones se dice que está dada en forma polar y que $\rho = f(\vartheta)$ es la **ecuación polar** de la curva.La razón de esta terminología se explica seguidamente.

Dado un punto $(x, y) \neq (0, 0)$, cualquier par de números (ρ, ϑ), tales que $\rho > 0$, $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, se llaman unas **coordenadas polares** de (x, y).Si, además, se exige que ϑ esté en un intervalo semiabierto $]a, b]$ o $[a, b[$ con $b - a = 2\pi$, dicha condición determina de manera única a ϑ. En particular si exigimos que $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$ entonces ρ es el módulo y ϑ es el argumento principal del número complejo $x + iy$.

Por tanto, dada una curva por una ecuación polar $\rho = f(\vartheta)$, el punto del plano que corresponde a cada valor del ángulo polar ϑ es $f(\vartheta)(\cos\vartheta, \mathrm{sen}\,\vartheta)$ con coordenadas polares:

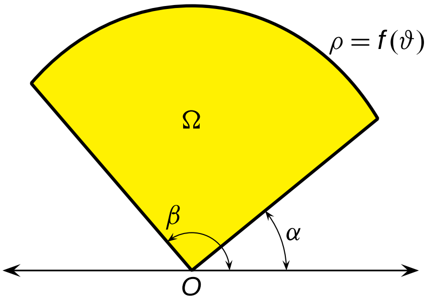
$$\begin{cases} (f(\vartheta), \vartheta), & \text{si } f(\vartheta) \geqslant 0. \\ (|f(\vartheta)|, \vartheta + \pi), & \text{si } f(\vartheta) < 0. \end{cases}$$

Debes tener claro que esta forma de representar una curva no es más que un tipo particular de representación paramétrica.

Áreas planas en polares

El área de una región dada por

$$\Omega = \{(\rho \cos\vartheta, \rho \operatorname{sen}\vartheta) : 0 \leqslant \rho \leqslant f(\vartheta), \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta\}$$

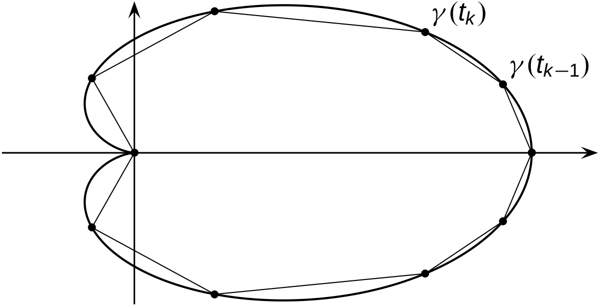


viene dada por

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\vartheta)^2 \,\mathrm{d}\vartheta$$

La longitud de la curva plana dada por las ecuaciones paramétricas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, viene dada por:

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t$$



Podemos calcular volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$ integrando las áreas de sus secciones por planos paralelos a uno dado.

Podemos calcular volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$ integrando las áreas de sus secciones por planos paralelos a uno dado. El caso más sencillo es el de los cuerpos de revolución o sólidos de revolución que son regiones de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen girando una región plana de alrededor de una recta llamada eje de giro.

Podemos calcular volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$ integrando las áreas de sus secciones por planos paralelos a uno dado. El caso más sencillo es el de los cuerpos de revolución o sólidos de revolución que son regiones de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen girando una región plana de alrededor de una recta llamada eje de giro. Vamos a considerar varios casos particulares de sólidos de revolución en los que las secciones por planos perpendiculares al eje de giro van a ser círculos o coronas circulares.

Método de los discos o arandelas

En este método se consideran secciones perpendiculares al eje de giro. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Girando la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje OX obtenemos un sólido de revolución Ω cuyo volumen viene dado por

Método de los discos o arandelas

En este método se consideran secciones perpendiculares al eje de giro. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Girando la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje OX obtenemos un sólido de revolución Ω cuyo volumen viene dado por

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

Método de los discos o arandelas

En este método se consideran secciones perpendiculares al eje de giro. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Girando la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje OX obtenemos un sólido de revolución Ω cuyo volumen viene dado por

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

El volumen del sólido de revolución, Ω, obtenido girando alrededor del eje OX una región de tipo I definida por dos funciones continuas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, se obtiene integrando las áreas de las coronas circulares o arandelas, $\Omega(x)$, de radio interior $f(x)$ y radio exterior $g(x)$, obtenidas al cortar Ω por un plano perpendicular al eje OX en el punto $(x,0,0)$.

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2) \, \mathrm{d}x$$

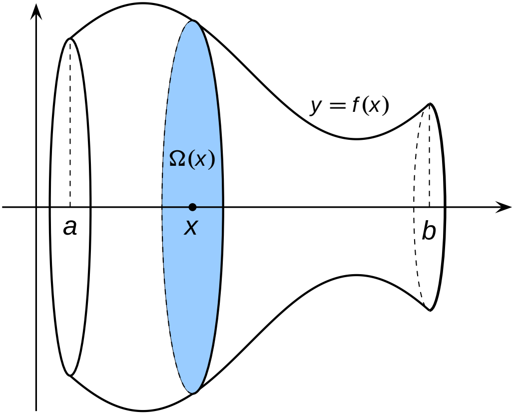


Figure. Método de los discos

Método de los discos o arandelas

Consideremos ahora un sólido de revolución obtenido girando alrededor del eje OY una región R de tipo II, definida por dos funciones continuas $\varphi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y)$ para todo $y \in [c, d]$, es decir, R es la región $R = \{(x, y) : y \in [c, d], \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$. El volumen del sólido de revolución resultante, Ω, viene dado por:

$$Vol(\Omega) = \pi \int_c^d (\psi(y)^2 - \varphi(y)^2)\, dy$$

Consideremos ahora un sólido de revolución obtenido girando alrededor del eje OY una región R de tipo II, definida por dos funciones continuas $\varphi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y)$ para todo $y \in [c, d]$, es decir, R es la región $R = \{(x, y) : y \in [c, d], \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$. El volumen del sólido de revolución resultante, Ω, viene dado por:

$$Vol(\Omega) = \pi \int_c^d (\psi(y)^2 - \varphi(y)^2)\, \mathrm{d}y$$

Este método puede aplicarse con facilidad para calcular el volumen de cuerpos de revolución obtenidos girando regiones de tipo I alrededor de rectas horizontales, o regiones de tipo II alrededor de rectas verticales.

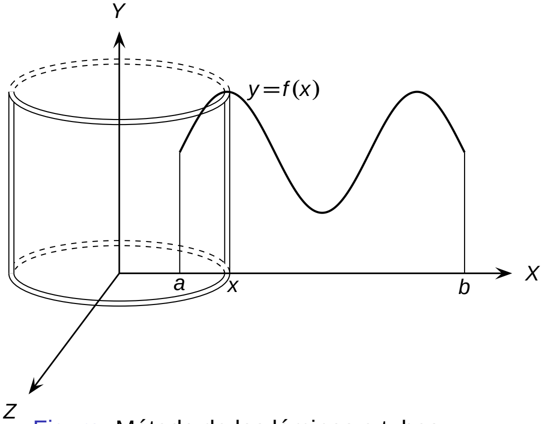


Figure. Método de las láminas o tubos

Método de las láminas o de los tubos

En este método se consideran secciones paralelas al eje de giro. Consideremos una función positiva $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y la región limitada por la gráfica de dicha función y las rectas verticales $x=a$, $x=b$. Observa que dicha región es de tipo I pero, en general, no es de tipo II. Girando dicha región alrededor del eje OY obtenemos un sólido de revolución, Ω, cuyo volumen viene dado por:

$$Vol(\Omega)=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Método de las láminas o de los tubos

En este método se consideran secciones paralelas al eje de giro. Consideremos una función positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y la región limitada por la gráfica de dicha función y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Observa que dicha región es de tipo I pero, en general, no es de tipo II. Girando dicha región alrededor del eje OY obtenemos un sólido de revolución, Ω, cuyo volumen viene dado por:

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

Esto es lo que se conoce como *método de las láminas o de las capas o de los tubos*. Puedes adaptar fácilmente esta expresión para el caso de que el eje de giro sea la recta vertical $x = c$. En general, si notamos por $R(x)$ el "radio de giro" de la lámina, entonces:

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b R(x) f(x)\, \mathrm{d}x$$

Área de una superficie de revolución

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función con derivada primera continua. Girando la gráfica de dicha función alrededor del eje OX obtenemos una superficie de revolución cuya área viene dada por:

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$